

ANÁLISIS DE SISTEMAS DE POTENCIA

J. Grainger – W. Stevenson

Capítulo 1 – Conceptos Básicos

1.1. Si $v = 141,1 \times \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$, $i = 11,31 \times \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ A}$, encuentre para cada uno: a) el valor máximo; b) el valor rms y c) la expresión fasorial en forma polar y rectangular, si el voltaje se toma como referencia. ¿El circuito es inductivo o capacitivo?

a) $v = 141,1 \times \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V} \Rightarrow V_{\text{máx}} = 141,1 \text{ V}$
 $i = 11,31 \times \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ A} \Rightarrow I_{\text{máx}} = 11,31 \text{ A}$

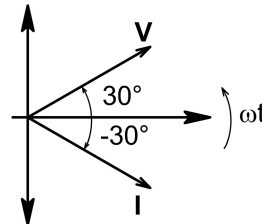
b) $V = \frac{V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{141,1}{\sqrt{2}} = 100 \text{ V} \quad I = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{11,31}{\sqrt{2}} = 8 \text{ A}$

c) Por **Euler**: $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, en donde: $\sin \omega t = \text{Im}(e^{j\omega t})$ y $\cos \omega t = \text{Re}(e^{j\omega t})$
(Re indica parte real, Im parte imaginaria)

Reemplazando tenemos: $v = \text{Im}(\sqrt{2} \times 100 \times e^{j\omega t + 30^\circ}) = \text{Im}(100 \times e^{j30^\circ} \times \sqrt{2} \times e^{j\omega t})$
 $i = \text{Re}(\sqrt{2} \times 8 \times e^{j\omega t - 30^\circ}) = \text{Re}(8 \times e^{-j30^\circ} \times \sqrt{2} \times e^{j\omega t})$

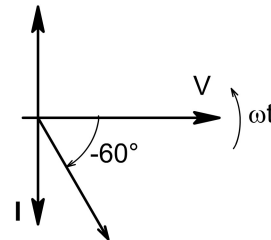
$e^{j\omega t}$, representa la rotación de los fasores, si tomamos las posiciones relativas entre ellos:

$V = 100 \times e^{j30^\circ} = \underbrace{100}_{\text{Polar}} \underbrace{\angle 30^\circ}_{\text{Rectangular}} = 86,6 + j50 \text{ V}$
 $I = 8 \times e^{-j30^\circ} = \underbrace{8}_{\text{Polar}} \underbrace{\angle -30^\circ}_{\text{Rectangular}} = 6,93 - j4 \text{ A}$



Para tomar V como referencia, lo hacemos coincidir con el eje horizontal, lo que implica girar el conjunto -30° :

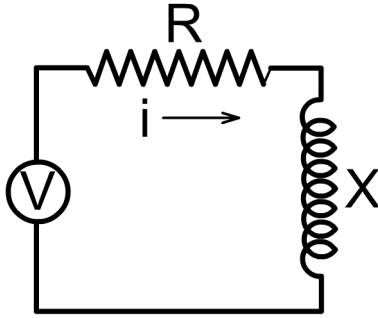
$V = 100 \times e^{j0} = 100 \text{ V}$
 $I = 8 \times e^{-j60^\circ} = \underbrace{8}_{\text{Polar}} \underbrace{\angle -60^\circ}_{\text{Rectangular}} = 4 - j6,93 \text{ A}$



El circuito es inductivo ya que la corriente está atrasada respecto de la tensión

1.2. Si el circuito del problema 1.1. consiste en un elemento puramente resistivo y uno puramente reactivo, encuentre R y X, si: a) los elementos están en serie; b) si están en paralelo.

a)

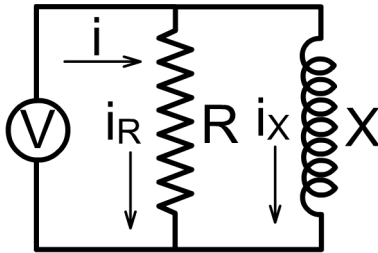


$$Z = R + jX$$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{100}{8 \angle -60^\circ} = 12.5 \angle 60^\circ \Omega$$

$$Z = \underbrace{6.25}_R + j\underbrace{10.83}_X \Omega$$

b)



$$i = i_R + i_X = 4 - j6.93 \text{ A}$$

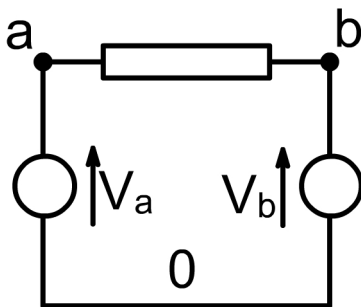
Sabemos que por R solo circulará corriente resistiva y que por X solo circulará corriente reactiva. Entonces:

$$i_R = 4 \text{ e } i_X = -j6.93$$

$$R = \frac{V}{i_R} = \frac{100}{4} = 25 \Omega$$

$$X = \frac{V}{i_X} = \frac{100}{-j6.93} = j14.4 \Omega$$

1.3. En un circuito monofásico, $V_a = 120 \angle 45^\circ \text{ V}$ y $V_b = 100 \angle -15^\circ \text{ V}$, con respecto al nodo de referencia "o". Encuentre V_{ba} en forma polar.



$$V_{ba} = V_a - V_b = 120 \angle 45^\circ - 100 \angle -15^\circ$$

$$V_{ba} = 84.85 + j84.85 - 96.6 + j25.9 = -11.75 + j110.75 \text{ V}$$

$$V_{ba} = 111.37 \angle 96^\circ \text{ V}$$

1.4. Un voltaje monofásico de CA de 240 V se aplica a un circuito serie cuya impedancia es: $Z = 10 \angle 60^\circ \Omega$. Encuentre R; X; P; Q y el factor de potencia del circuito.

$$Z = 10 \angle 60^\circ \Omega = 5 + j8.66, \text{ o sea: } R = 5 \Omega \text{ y } X = j8.66 \Omega$$

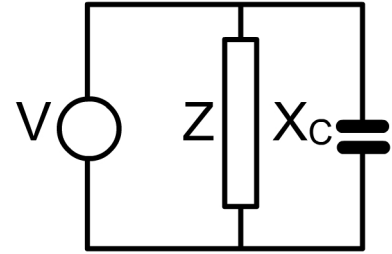
$$S = \frac{V^2}{Z^*} = \frac{240^2}{10 \angle -60^\circ} = 5760 \angle 60^\circ \text{ VA} \quad \cos \phi = \cos 60 = 0.5 \quad (* \text{ indica conjugado})$$

1.5. Si un capacitor que suministra 1250Var se conecta en paralelo con el circuito del problema 1.4., encuentre P y Q suministradas por la fuente de 240V, así como el factor de potencia resultante.

$$X_C^* = \frac{V^2}{Q_C} = \frac{(240)^2}{-j1250} = 46,08 \angle 90^\circ \text{ W} \quad X_C = -j46,08$$

$$Z_{eq} = \frac{Z \times X_C}{Z + X_C} = \frac{10 \angle 60^\circ \times 46,08 \angle -90^\circ}{5 + j8,66 - j46,08} = \frac{460 \angle -30^\circ}{37,75 \angle -82,39^\circ} = 12,2 \angle 52,39^\circ \text{ W}$$

$$S = \frac{V^2}{Z_{eq}^*} = \frac{(240)^2}{12,2 \angle -52,39^\circ} = 4719 \angle 52,39^\circ \text{ VA} \quad \cos \phi = \cos 52,39 = 0,61$$



Otra forma de resolverlo es suponer que la potencia que entrega la fuente es la suma de la potencia, que consume la impedancia más la potencia reactiva capacitiva, que consume el capacitor.

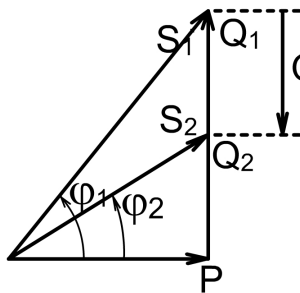
$$S_Z = 5760 \angle 60^\circ = 2880 + j4988,31 \text{ VA}$$

$$Q_C = -j1250 \text{ VA}$$

$$S = S_Z + Q_C = 2880 + j4988,31 - j1250$$

$$S = 4719 \angle 52,39^\circ \text{ VA} \quad \text{Como se ve, se llega al mismo resultado que en el caso anterior.}$$

1.6. Una Carga inductiva monofásica absorbe 10 MW a 0,6 de factor de potencia en atraso. Dibuje el triángulo de potencia y determine la potencia reactiva de un capacitor que se conecte en paralelo con la carga para elevar el factor de potencia a 0,85.



$$S_1 = \frac{P}{\cos \phi_1} = \frac{10}{0,6} = 16,66 \text{ MVA}$$

$$\phi_1 = \arccos(0,6) = 53,13^\circ \quad \sin \phi_1 = 0,8$$

$$Q_1 = S_1 \times \sin \phi_1 = 16,66 \times 0,8 = j13,33 \text{ VAr}$$

$$\cos \phi_2 = 0,85 \quad \phi_2 = 31,8^\circ \quad \tan \phi_2 = 0,62$$

$$Q_2 = P \times \tan \phi_2 = j6,2 \text{ VAr}$$

Un capacitor puesto en paralelo con la carga, debe aportar una potencia reactiva capacitiva igual a :

$$Q_C = Q_2 - Q_1$$

$$Q_C = j6,2 - j13,33$$

$$Q_C = -j7,133 \text{ VAr}$$

1.7. Un motor de inducción monofásico que toma 10 A de la alimentación se opera la mayor parte de cada día con una carga muy ligera. Se propone un dispositivo que “incremente la eficiencia” del motor. Durante una demostración, el dispositivo se coloca en paralelo con el motor sin carga y la corriente que toma de la alimentación cae a 8 A. Cuando se colocan dos de los dispositivos en paralelo, la corriente cae a 6 A. ¿Qué dispositivo simple causará esta caída en la corriente?

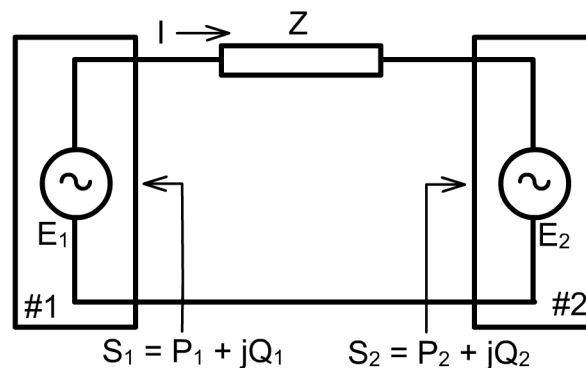
Analice las ventajas del dispositivo. ¿Se incrementa la eficiencia del motor por la presencia del dispositivo? (Recuerde que un motor de inducción toma corriente en atraso)

El “dispositivo” mencionado es un capacitor que al ser conectado en paralelo con el motor, aportará 2 A , haciendo que los 10 A que consume el motor, se compongan de 8 A aportados por la alimentación y 2 A aportados por el capacitor. Lo mismo ocurre al agregar otro capacitor, en este caso la alimentación aporta 6 A y los capacitores 4 A.

Con respecto a la eficiencia del motor, esta no se incrementa, ya que no se está modificando la potencia activa que consume dicho motor, los capacitores solo mejoran el factor de potencia de la alimentación.

Ejemplo 1.1. Dos fuentes ideales de voltaje, designadas como máquinas 1 y 2, se conectan como muestra la figura. Si $E_1 = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$, $E_2 = 100 \angle 30^\circ \text{ V}$ y $Z = 0 + j5 \Omega$, determine:

- Si cada máquina genera o consume potencia real y en qué cantidad.
- Si cada máquina recibe o suministra potencia reactiva y la cantidad.
- P y Q absorbidas por la impedancia.



$$I = \frac{E_1 - E_2}{Z} = \frac{100 + j0 - (86,6 + j50)}{j5}$$

$$I = \frac{13,4 - j50}{j5} = -10 - j2,68 = 10,35 \angle 195^\circ \text{ A} \quad \text{p} \quad -I = 10 + j2,68$$

La corriente que entra en la caja 1 es $-I$, y la que entra en la caja 2 es I .

$$S_1 = E_1 (-I)^* = 100 \times (10 + j2,68)^* \quad S_2 = E_2 \times I^* = (86,6 + j50) \times (-10 - j2,68)^*$$

$$P_1 + jQ_1 = 1000 - j268 \text{ VA} \quad P_2 + jQ_2 = -1000 - j268 \text{ VA}$$

La potencia reactiva absorbida por la impedancia serie es: $|I|^2 \times X = (10,35)^2 \times j5 = j536 \text{ VAR}$

La máquina 1 consume energía a razón de $P_1 = 1000 \text{ W}$ y suministra una potencia reactiva de $Q_1 = 268 \text{ VAR}$.

La máquina 2 genera energía a razón de $P_2 = 1000 \text{ W}$ y suministra una potencia reactiva de $Q_2 = 268 \text{ VAR}$

La suma de los suministros reactivos de ambas máquinas es el consumo de la reactancia serie o sea: $Q_X = 536 \text{ VAR}$.

1.8. Si la impedancia entre las máquinas 1 y 2 del **Ejemplo 1.1.** es $Z = 0 - j5 \Omega$, determine

- Si cada máquina está generando o consumiendo potencia.
- Si cada máquina está recibiendo o suministrando potencia reactiva y la cantidad.
- Los valores de P y Q absorbidos por la impedancia.

$$I = \frac{E_1 - E_2}{Z} = \frac{100 + j0 - (86,6 + j50)}{-j5}$$

$$I = \frac{13,4 - j50}{-j5} = 10 + j2,68 = 10,35 \angle 15^\circ \text{ A} \quad -I = -10 - j2,68 = 10,35 \angle 195^\circ \text{ A}$$

La corriente que entra en la caja 1 es $-I$, y la que entra en la caja 2 es I .

$$S_1 = E_1 \times (-I)^* = 100 \times (-10 - j2,68)^* = 1035 \angle 165^\circ \text{ VA}$$

$$S_1 = -1000 + j268 \text{ VA}$$

$$S_2 = E_2 \times I^* = 100 \angle 30^\circ \times (10 + j2,68)^* = 1035 \angle 15^\circ \text{ VA}$$

$$S_2 = 1000 + j268 \text{ VA}$$

$$\text{La impedancia serie entrega: } |I|^2 \times X = (10,35)^2 \times (-j5) = -j536 \text{ VAr}$$

La máquina 1 genera energía a razón de $P_1 = 1000 \text{ W}$ y absorbe una potencia reactiva de $Q_1 = 268 \text{ VAr}$.

La máquina 2 consume energía a razón de $P_2 = 1000 \text{ W}$ y absorbe una potencia reactiva de $Q_2 = 268 \text{ VAr}$

En este caso, las dos máquinas están consumiendo potencia reactiva, la que es suministrada por la reactancia serie como lo indica el signo (-) en su consumo de reactivo.

1.9. Repita el problema 1.8. si $Z = 5 - j0 \text{ W}$

$$I = \frac{13,4 - j50}{5} = 2,68 - j10 = 10,35 \angle -75^\circ \text{ A} \quad -I = -2,68 + j10 = 10,35 \angle 105^\circ \text{ A}$$

La corriente que entra en la caja 1 es $-I$, y la que entra en la caja 2 es I .

$$S_1 = E_1 \times (-I)^* = 100 \times (-2,68 + j10)^* = 1035 \angle 255^\circ \text{ VA}$$

$$S_1 = -268 - j1000 \text{ VA}$$

$$S_2 = E_2 \times I^* = 100 \angle 30^\circ \times (2,68 - j10)^* = 1035 \angle 105^\circ \text{ VA}$$

$$S_2 = -268 + j1000 \text{ VA}$$

$$\text{La impedancia serie consume: } |I|^2 \times R = (10,35)^2 \times (5) = 536 \text{ W}$$

La máquina 1 genera energía a razón de $P_1 = 268 \text{ W}$ y entrega una potencia reactiva de $Q_1 = 1000 \text{ VAr}$.

La máquina 2 genera energía a razón de $P_2 = 268 \text{ W}$ y absorbe una potencia reactiva de $Q_2 = 1000 \text{ VAr}$

La impedancia serie está consumiendo toda la potencia activa que generan las dos máquinas.

1.10. Se tiene una fuente de voltaje $E_{an} = -120 \angle 210^\circ \text{ V}$ y una corriente a través de ella de

$I_{an} = 10 \angle 60^\circ \text{ A}$. Encuentre los valores de P y Q , y establezca si la fuente los está entregando o recibiendo.

$$S_{an} = E_{an} \times I_{an}^* = -120 \angle 210^\circ \times 10 \angle -60^\circ = -1200 \angle 150^\circ \text{ VA}$$

$$S_{an} = 1039 - j600 \text{ VA}$$

La fuente está consumiendo 1039 W y entregando 600 Var

1.11. Resuelva el Ejemplo 1.1. si $E_1 = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$, $E_2 = 120 \angle 30^\circ \text{ V}$. Compare los resultados con los del Ejemplo 1.1. y haga conclusiones sobre el efecto en el circuito de la variación de la magnitud de E_2 .

$$I = \frac{E_1 - E_2}{Z} = \frac{100 + j0 - (103,92 + j60)}{j5}$$

$$I = \frac{-3,92 - j60}{j5} = -12 + j0,784 = 12,02 \angle 176,26^\circ \text{ A}$$

La corriente que entra en la caja 1 es $-I$, y la que entra en la caja 2 es I .

$$S_1 = E_1(-I)^* = 100 \times (12 + j0,784)^* \quad S_2 = E_2 \times I^* = 120 \angle 30^\circ \times (-12 + j0,784)^*$$

$$P_1 + jQ_1 = 1200 + j78,4 \text{ VA} \quad P_2 + jQ_2 = -1200 - j801,15 \text{ VA}$$

La potencia reactiva absorbida por la impedancia serie es: $|I|^2 \times X = (12,02)^2 \times j5 = j722,75 \text{ VAR}$

La máquina 1 consume energía a razón de $P_1 = 1200 \text{ W}$ y consume una potencia reactiva de $Q_1 = 78,4 \text{ VAR}$.

La máquina 2 genera energía a razón de $P_2 = 1200 \text{ W}$ y suministra una potencia reactiva de $Q_2 = 801,15 \text{ VAR}$

La impedancia serie consume el sobrante de energía reactiva de la máquina 2 que no es consumido por la máquina 1

El aumento del módulo de la tensión 2, hace que se invierta el flujo de energía reactiva en la máquina 1, pasando de ser generador de reactivo a consumidor, además la potencia activa puesta en juego se incrementa.

1.12. Calcule las siguientes expresiones en forma polar:

a) $a - 1$; b) $1 - a^2 + a$; c) $a^2 + a + 1$; d) $ja + a^2$

$$a) -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \angle 150^\circ$$

$$b) 1 - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + j\sqrt{3} = 2 \angle 60^\circ$$

$$c) -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$$

$$d) j\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} + j\frac{-1 - \sqrt{3}}{2} = -1,366 - j1,366 = 1,93 \angle 225^\circ$$

1.13. Tres impedancias idénticas de $Z = 10 \angle -15^\circ \text{ }\Omega$, están conectadas en Y para balancear voltajes de línea trifásicos de 208 V. Especifique todos los voltajes y las corrientes de línea y

de fase como fasores en forma polar, con V_{ca} como referencia y tomando una secuencia de fase abc.

$$V_{ca} = 208 \angle 0^\circ \text{ V} \quad V_{ab} = 208 \angle 240^\circ \text{ V} \quad V_{bc} = 208 \angle 120^\circ \text{ V}$$

$$V_{ca} = V_{cn} + V_{na}$$

$$V_{ca} = V_{cn} - V_{an}$$

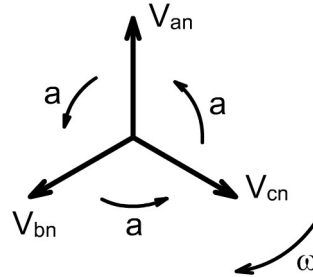
$$V_{an} = a \times V_{cn}$$

$$V_{ca} = V_{cn}(1 - a)$$

$$V_{cn} = \frac{V_{ca}}{1 - a}$$

$$1 - a = \sqrt{3} \angle -30^\circ$$

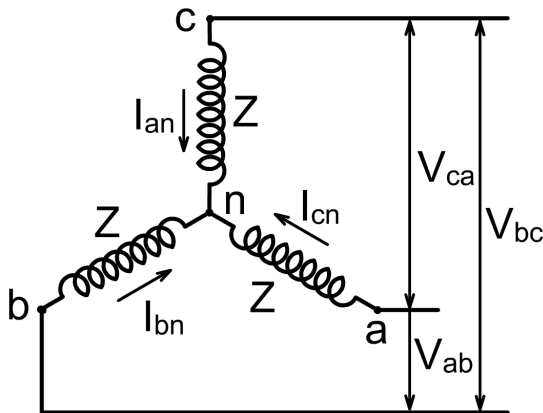
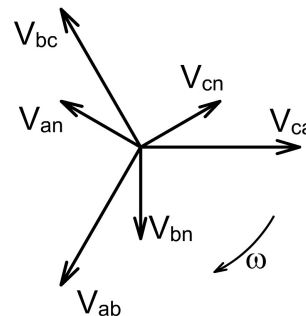
$$V_{cn} = \frac{208 \angle 0^\circ}{\sqrt{3} \angle -30^\circ} = 120 \angle 30^\circ \text{ V}$$



Aplicando a este vector los operadores "a", obtenemos:

$$V_{an} = a^2 \times V_{cn} = 120 \angle 210^\circ \text{ V}$$

$$V_{bn} = a \times V_{cn} = 120 \angle 90^\circ \text{ V}$$

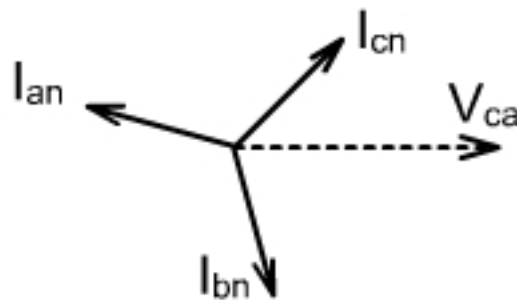


Las corrientes se obtienen dividiendo las tensiones de fase por la impedancia:

$$I_{an} = \frac{V_{an}}{Z} = \frac{120 \angle 150^\circ}{10 \angle -15^\circ} = 12 \angle 165^\circ \text{ A}$$

$$I_{bn} = \frac{V_{bn}}{Z} = \frac{120 \angle 270^\circ}{10 \angle -15^\circ} = 12 \angle -75^\circ \text{ A}$$

$$I_{cn} = \frac{V_{cn}}{Z} = \frac{120 \angle 30^\circ}{10 \angle -15^\circ} = 12 \angle 45^\circ \text{ A}$$



1.14. En un sistema trifásico balanceado, las impedancias conectadas en Y son de $10 \angle 30^\circ \Omega$. Si $V_{bc} = 416 \angle 90^\circ \text{ V}$, especifique I_{cn} en forma polar.

$$V_{bc} = V_{bn} - V_{cn} \quad V_{bn} = a^2 \times V_{cn} \quad V_{bc} = V_{cn} \times (a^2 - 1) \quad a^2 - 1 = \sqrt{3} \angle -150^\circ$$

$$V_{cn} = \frac{V_{bc}}{(a^2 - 1)} = \frac{416 \angle 90^\circ}{\sqrt{3} \angle -150^\circ} = 240 \angle 240^\circ \text{ V}$$

$$I_{cn} = \frac{V_{cn}}{Z} = \frac{240 \angle 240^\circ}{10 \angle 30^\circ} = 24 \angle 270^\circ \text{ A}$$

1.15. Las terminales de una fuente trifásica se etiquetan como a, b y c. Entre cualquier par de ellas, un voltímetro mide 115 V. Se conectan en serie una resistencia de 100 Ω y un capacitor de 100 Ω a la frecuencia de alimentación entre los puntos a y b, con la resistencia conectada en a. El punto de interconexión de los elementos se etiqueta como n. Determine en forma gráfica la lectura del voltímetro entre c y n, si la secuencia de fases es abc y si es acb.

Secuencia abc:

Tomando como referencia V_c :

$$V_c = 115 \angle 0^\circ; V_a = 115 \angle 120^\circ; V_b = 115 \angle 240^\circ$$

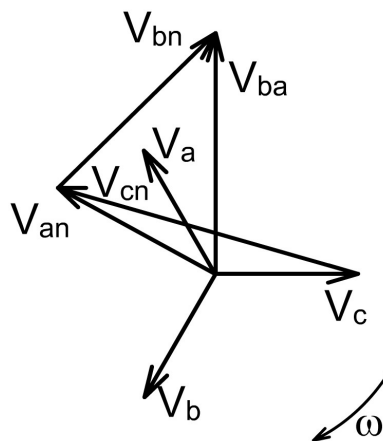
$$V_{ba} = V_a - V_b = 115 \angle 120^\circ - 115 \angle 240^\circ = 199,2 \angle 90^\circ \text{ KV}$$

Podemos ver que:

$$i = \frac{V_{ba}}{R - jX} = \frac{199,2 \angle 90^\circ}{100 - j100} = 1,41 \angle 135^\circ \text{ KA y}$$

$$V_{an} = R \times i = 100 \times 1,41 \angle 135^\circ = 141 \angle 135^\circ \text{ KV}$$

$$V_{bn} = X_c \times i = -j100 \times 1,41 \angle 135^\circ = 141 \angle 45^\circ \text{ KV}$$

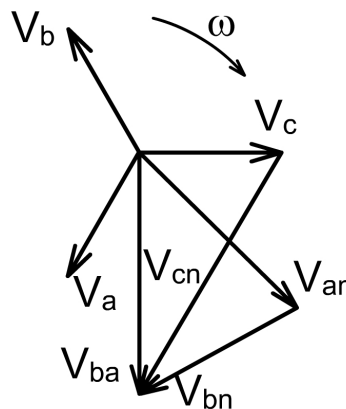
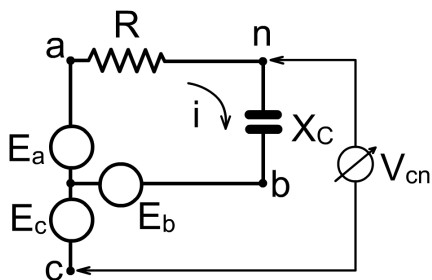


Podemos ver que:

$$i = \frac{V_{ba}}{R - jX} = \frac{199,2 \angle -90^\circ}{100 - j100} = 1,41 \angle -45^\circ \text{ KA y}$$

$$V_{an} = R \times i = 100 \times 1,41 \angle -45^\circ = 141 \angle -45^\circ \text{ KV}$$

$$V_{bn} = X_c \times i = -j100 \times 1,41 \angle -45^\circ = 141 \angle -135^\circ \text{ KV}$$



Secuencia acb:

Tomando como referencia V_c :

$$V_c = 115 \angle 0^\circ; V_b = 115 \angle 120^\circ; V_a = 115 \angle 240^\circ$$

$$V_{ba} = V_a - V_b = 115 \angle 240^\circ - 115 \angle 120^\circ = 199,2 \angle -90^\circ \text{ KV}$$

1.16. Determine la corriente que toma, de una línea trifásica de 440 V, un motor trifásico de 15 hp que opera a plena carga, con 90% de eficiencia y 80% de factor de potencia en atraso. Encuentre los valores de P y Q que se toman de la línea.

$$|S| = \frac{15 \text{ hp} \times 736 \frac{\text{W}}{\text{hp}} \times 0,9}{0,8} = 12420 \text{ VA} \quad \phi = \arccos 0,8_{\text{Ind}} = 36,87^\circ$$

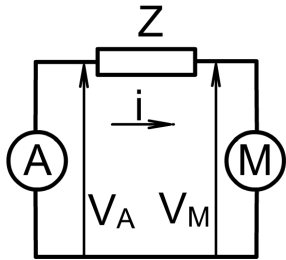
$$S = 12420 \angle 36,87^\circ \text{ VA}$$

$$S = V \times I^* \Rightarrow I^* = \frac{S}{V} = \frac{12420 \angle 36,87^\circ \text{ VA}}{440 \text{ V}} = 28,23 \angle 36,87^\circ \text{ A} \Rightarrow I = 28,23 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

$$P = |S| \times \cos(\phi) \quad Q = |S| \times \sin(\phi)$$

$$P = 12420 \times \cos(36,87) = 9936 \text{ W} \quad Q = 12420 \times \sin(36,87) = 7452 \text{ VA}$$

1.17. Si la impedancia de cada una de las tres líneas que conectan al motor del problema **1.16.** con la barra de alimentación es de $0,3 + j1 \Omega$, encuentre el voltaje línea a línea en la barra que suministra 440 V en las terminales del motor.



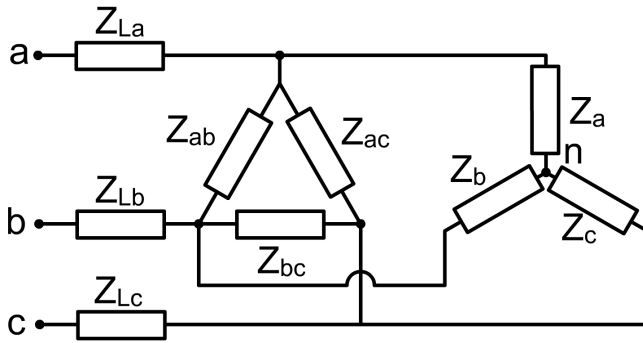
Representando una de las fases del sistema, y tomando como referencia a la tensión en la barra del motor, vemos:

$$Z = 0,3 + j1 = 1,04 \angle 73,3^\circ \Omega$$

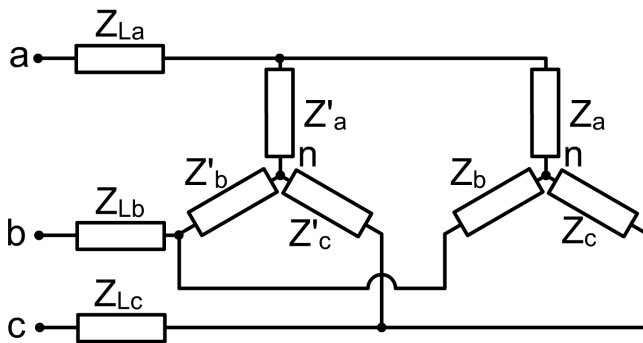
$$U_A = I \times Z + V_M \quad U_A = 28,23 \angle -36,87^\circ \times 1,04 \angle 73,3^\circ + 440 \angle 0^\circ$$

$$U_A = 29,36 \angle 36,43^\circ + 440 \angle 0^\circ = 463,62 + j17,435 = 463,95 \angle 2,15^\circ \text{ V}$$

1.18. Una carga Δ balanceada que consiste en resistencias puras por fase de 15Ω está en paralelo con una carga Y balanceada que tiene impedancias por fase de $8 + j6 \Omega$. Cada una de las tres líneas que conectan las cargas combinadas con una fuente de alimentación de 110 V trifásicos, tiene una impedancia de $2 + j5 \Omega$. Encuentre la corriente que suministra la fuente y el voltaje en las cargas combinadas.



Para obtener una carga única equivalente a las dos combinadas, se realizará una conversión del Δ a Y



$$Z'_a = \frac{Z_{ab} \times Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ac}}$$

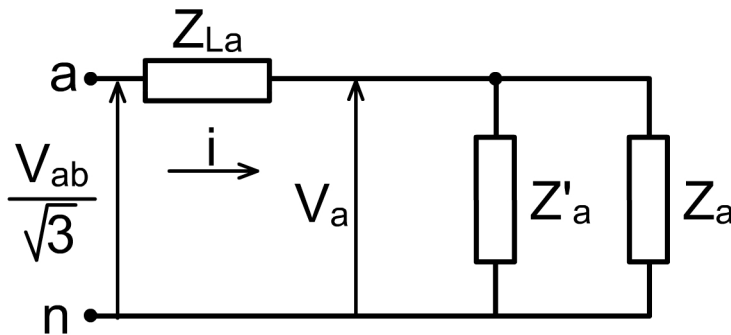
$$Z'_b = \frac{Z_{bc} \times Z_{ab}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ac}}$$

$$Z'_c = \frac{Z_{ca} \times Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ac}}$$

Para simplificar los cálculos, vamos a trabajar solo con la fase "a", sabiendo que en las restantes los valores son iguales modificados por los operadores a y a^2 .

$$Z'_a = \frac{15 \times 15}{15 + 15 + 15} = 5 \angle 0^\circ \Omega$$

Representamos el sistema unifilarmente:



Se puede ver que, con respecto al punto de unión, Z'_a está en paralelo con Z_a y ambas en serie con Z_{La} , o

$$\text{sea: } Z_{eq,a} = \frac{Z'_a \times Z_a}{Z'_a + Z_a} + Z_{La}$$

$$Z_{eq,a} = \frac{Z'_a \times Z_a}{Z'_a + Z_a} + Z_{La} \quad Z_{eq,a} = \frac{5 \times (8 + j6)}{5 + 8 + j6} + 2 + j5 = 5,41 + j5,73 = 7,88 \angle 46,64^\circ \Omega$$

Tomando V_{ab} como referencia:

$$I_a = \frac{V_{ab}}{\sqrt{3} \times Z_{eq,a}} = \frac{110 \angle 0^\circ}{\sqrt{3} \times 7,88 \angle 46,64^\circ} = 8,06 \angle -46,64^\circ \text{ A}$$

$$V_a = \frac{V_{ab}}{\sqrt{3}} - I_a \times Z_{La} = \frac{110}{\sqrt{3}} - 8,06 \angle -46,64^\circ \times (2 + j5) = 23,19 + j15,93 = 28,13 \angle 34,49^\circ \text{ V}$$

1.19. Una carga trifásica toma de una línea de 440 V, 250 KW con un factor de potencia de 0,707 en atraso. En paralelo con esta carga se encuentra un banco de capacitores trifásico que toma 60 KVA. Encuentre la corriente total y el factor de potencia resultante.

La potencia trifásica de la carga será: $S = \frac{P}{\cos \phi} = \frac{250}{0,707} = 353,61 \text{ KVA}$

Un factor de potencia 0,707 en atraso, significa que el ángulo de potencia será:

$\cos \phi = 0,707 \Rightarrow \phi = \arccos 0,707 = 45^\circ$ (al ser en atraso la potencia es inductiva y el ángulo será positivo)

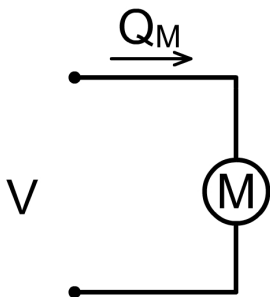
La potencia total que sale de la línea será: $S_T = 353,61 \angle 45^\circ + 60 \angle -90^\circ = 314 \angle 37,23^\circ \text{ KVA}$

El factor de potencia resultante, entonces: $\cos \phi_R = \cos(37,23) = 0,8$

La corriente total será: $I_T^* = \frac{S_T}{U} = \frac{314 \angle 37,23^\circ}{440} = 0,714 \angle 37,23^\circ \text{ A} \Rightarrow I_T = 0,714 \angle -37,23^\circ \text{ A}$

1.20. Un motor trifásico toma de una fuente de 220 V, 20 KW con un factor de potencia de 0,707 en atraso. Determine los KVA de los capacitores que darían un factor de potencia combinado de 0,9 en atraso, así como la corriente de línea antes y después de que se añadan los capacitores.

Antes de los capacitores:



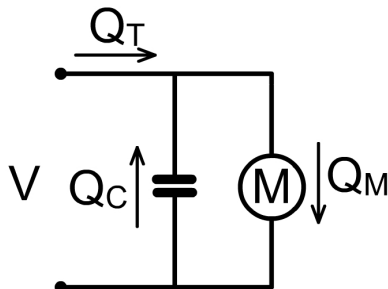
$$|S_M| = \frac{P_M}{\cos \phi_M} = \frac{20}{0,707} = 28,28 \text{ VA}$$

$$\cos \phi_M = 0,707_{\text{ind}} \Rightarrow \phi_M = 45^\circ \angle S_M = 20 + j20 \text{ VA}$$

$$Q_M = j20 \text{ VAR}$$

$$I_M^* = \frac{S_M}{V} = \frac{28,28 \angle 45^\circ}{220} = 0,13 \angle 45^\circ \Rightarrow I_M = 0,13 \angle -45^\circ \text{ A}$$

Después de los capacitores:



$$S_T = P_M + j(Q_M - Q_C)$$

$$\cos \phi_T = 0,9_{\text{ind}} \Rightarrow \phi_T = 25,84^\circ$$

$$|S_T| = \frac{P_M}{\cos \phi_T} = \frac{20}{0,9} = 22,22 \text{ VA}$$

$$Q_X = |S_T| \times \sin \phi_T$$

$$Q_C = Q_M - |S_T| \times \sin \phi_T = j20 - j22,22 \times \sin(25,84)$$

$$Q_C = 10,31 \text{ VAR}$$

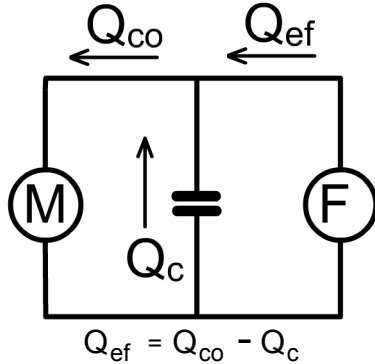
$$I_T^* = \frac{S_T}{V} = \frac{22,22 \angle 25,84}{220} = 0,1 \angle 25,84 \text{ A} \quad I_T = 0,1 \angle -25,84 \text{ A}$$

1.21. Una máquina de “dragado de línea” de una mina abierta de carbón consume 0,92 MVA con un factor de potencia de 0,8 en atraso cuando desentierra carbón y genera (entrega energía al sistema eléctrico) 0,1 MVA con un factor de potencia 0,5 en adelanto cuando la pala cargada de carbón lo echa fuera de la mina. Al final del período de excavación, el cambio en la magnitud del suministro de corriente puede causar el disparo de un relevador de protección construido con circuitería de estado sólido. Por lo tanto, se desea minimizar el cambio en la magnitud del suministro de corriente. Considere la colocación de capacitores en las terminales de la máquina y encuentre la cantidad de corrección capacitiva (en KVAR) para eliminar el cambio en la magnitud de la corriente en estado estable. La máquina se energiza desde una fuente trifásica de 36,5 KV.

Empiece la solución dejando que Q sean los MVAR trifásicos totales de los capacitores que se conectan en las terminales de la máquina y escriba una expresión para la magnitud de la corriente de línea que toma la máquina, durante las operaciones de excavación y generación.

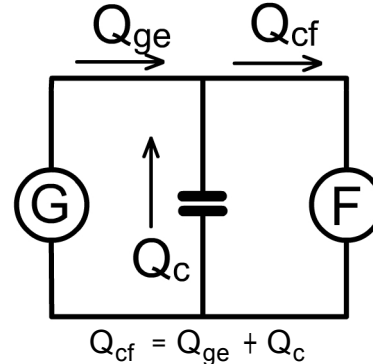
Con la máquina consumiendo

Los flujos de reactivos son:



Con la máquina Generando

Los flujos de reactivos son:



$$S_{co} = 0,92 \angle 36,87 = \underbrace{0,736}_{P_{co}} + j \underbrace{0,552}_{Q_{co}} \quad y \quad S_{ge} = 0,1 \angle -60 = \underbrace{0,05}_{P_{ge}} + j \underbrace{0,087}_{Q_{ge}}, \text{ el capacitor no va a}$$

modificar las potencias activas, por lo tanto: $S_{ef} = P_{co} + jQ_{ef} = 0,736 + j0,552 - jQ_c$ y

$$S_{cf} = P_{ge} + jQ_{cf} = 0,05 + j0,087 + Q_c$$

La corriente entregada y consumida por la fuente será:

$$I_{ef} = \frac{P_{co} + jQ_{ef}}{\sqrt{3} \times V} \quad y \quad I_{cf} = \frac{P_{ge} + jQ_{cf}}{\sqrt{3} \times V}$$

Para que las magnitudes de las corrientes no cambien, debemos hacer que los módulos de ambas sean iguales: $|I_{ef}| = |I_{cf}|$. Reemplazando y operando queda:

$(0,736)^2 + (0,552 - |Q_c|)^2 = (0,05)^2 + (0,087 + |Q_c|)^2$ p $|Q_c| = 0,655 \text{ MVar}$, que es el valor de la potencia reactiva que debe aportar el capacitor conectado en paralelo con la máquina. La reactancia de este capacitor será: $|X_c| = \frac{V^2}{|Q_c|} = \frac{(36,5)^2}{0,655} = 2034 \text{ W}$

1.22. Un generador (que se puede representar por una fem en serie con una reactancia inductiva) tiene valores nominales de 500 MVA y 22 KV. Sus devanados, conectados en Y, tiene una reactancia de 1,1 en por unidad. Encuentre el valor óhmico de la reactancia de los devanados.

La impedancia base propia del generador es: $Z_{bG} = \frac{U_G^2}{S_G} = \frac{(22)^2 [\text{KV} \times \text{KV}]}{500 [\text{MVA}]} = 0,968 \text{ W}$

Y la reactancia en ohms es: $x_{[W]} = x_{G[0/1]} \times Z_{bG} = 1,1 \times 0,968 = 1,065 \text{ W}$

1.23. El generador del problema 1.22. se coloca en un circuito para el que las bases se especifican como 100 MVA y 20 KV. Si comienza por el valor en por unidad dado en del problema 1.22., encuentre el nuevo valor en por unidad de la reactancia de los devanados del generador para la base especificada.

$$x_{[0/1]} = x_{G[0/1]} \times \frac{S_{bG}}{(U_{bG})^2} \times \frac{(U_b)^2}{S_b} = 1,1 \times \frac{500 [\text{MVA}]}{(22)^2 [\text{KV} \times \text{KV}]} \times \frac{(20)^2 [\text{KV} \times \text{KV}]}{100 [\text{MVA}]} = 4,54$$

1.24. Dibuje EL circuito equivalente monofásico para el motor (una fem en serie con una reactancia inductiva designada Z_m) y su conexión a la fuente de voltaje descrita en los problemas 1.16. y 1.17. . Muestre sobre el diagrama los valores en por unidad de la impedancia de la línea y el voltaje en las terminales del motor sobre la base de 20 KVA y 440 V. Una vez hecho esto , y usando los valores en por unidad, encuentre el voltaje de la fuente en por unidad y después conviértalo a volts.

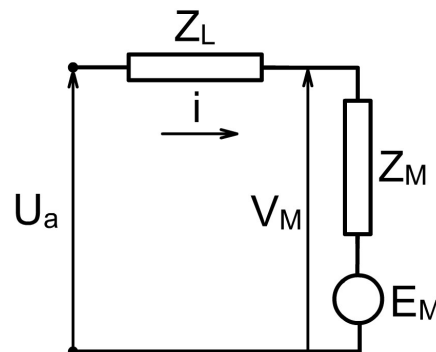
Tomando como bases: $S_b = 20 \text{ KVA} = 20000 \text{ VA}$ y $U_b = 440 \text{ V}$:

La impedancia base para este sistema es:

$$Z_b = \frac{U_b^2}{S_b} = \frac{(440)^2 [\text{V} \times \text{V}]}{20000 [\text{VA}]} = 9,68 \text{ W}$$

La corriente base:

$$I_b = \frac{S_b}{\sqrt{3} \times U_b} = \frac{20000 [\text{VA}]}{\sqrt{3} \times 440 [\text{V}]} = 26,24 \text{ A}$$



La impedancia de la línea en por unidad es:

$$Z_{L[0/1]} = \frac{Z_L}{Z_b} = \frac{0,3}{9,68} + j \frac{1}{9,68} = 0,03 + j0,103 = 0,107 \angle 73,25$$

Y la corriente en por unidad: $I_{[0/1]} = \frac{I}{I_b} = \frac{28,23 \angle -36,87}{26,24} = 1,076 \angle -36,87$

La tensión en bornes del motor en por unidad: $V_m[0/1] = \frac{V_m}{U_b} = \frac{440[V]}{440[V]} = 1$

Con todos los valores en por unidad , el voltaje de la fuente es:

$$U_a[0/1] = 1,092 + j0,068 = 1,095 \angle 3,57$$

$$U_a = U_a[0/1] \times U_b = 1,095 \angle 3,57 \times 440 = 481,8 \angle 3,57 \text{ V}$$

1.25. Escriba las dos ecuaciones de admitancia de nodo similares a las ecuaciones (1.57) Y (1.58) para los voltajes en los nodos 2 y 4 del circuito de la figura y arréguelas para los cuatro nodos independientes de la figura dentro de la forma Y_{barra} de la ecuación (1.61).

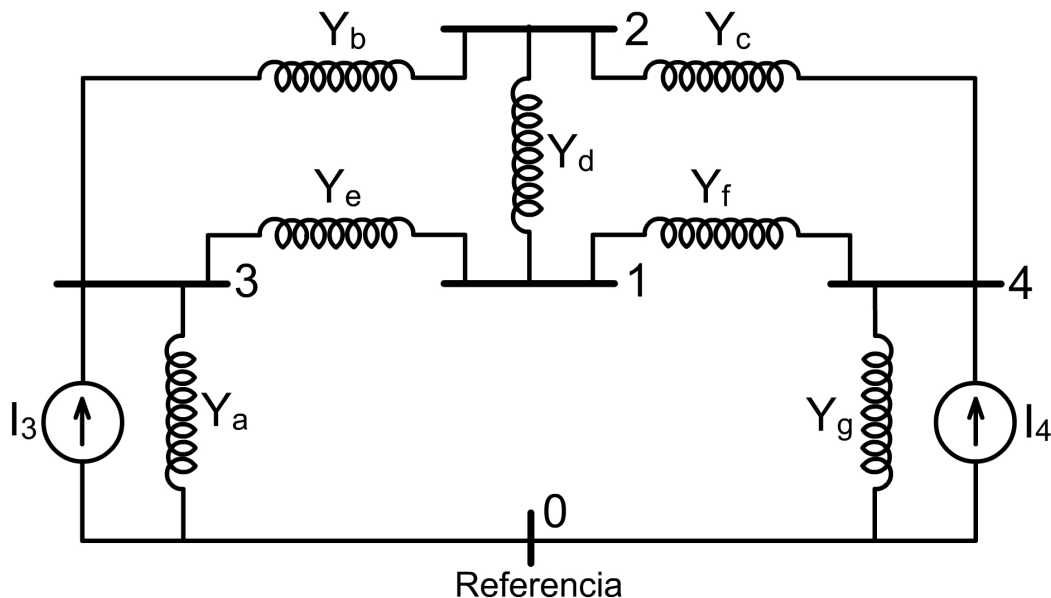
(1.57) Nodo 1 $(V_1 - V_3)Y_c + (V_1 - V_2)Y_d + (V_1 - V_4)Y_f = 0$

Nodo 1 Arreglada $V_1(Y_c + Y_d + Y_f) - V_2Y_d - V_3Y_c - V_4Y_f = 0$

(1.58) Nodo 3 $V_3Y_a + (V_3 - V_2)Y_b + (V_3 - V_1)Y_c = I_3$

Nodo 3 Arreglada $-V_1Y_c - V_2Y_b + V_3(Y_a + Y_b + Y_c) = I_3$

(1.61)
$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}$$



Nodo 2 $(V_2 - V_3)Y_b + (V_2 - V_1)Y_d + (V_2 - V_4)Y_c = 0$

Nodo 2 Arreglada $-V_1Y_d + V_2(Y_b + Y_d + Y_c) - V_3Y_b - V_4Y_c = 0$

Nodo 4 $V_4Y_g + (V_4 - V_1)Y_f + (V_4 - V_2)Y_e = I_4$

$$\text{Nodo 4 Arreglada} \quad -V_1 Y_f - V_2 Y_e + V_4 (Y_g + Y_f + Y_e) = 0$$

$$\begin{vmatrix} (Y_c + Y_d + Y_f) & -Y_d & -Y_c & -Y_f \\ -Y_d & (Y_b + Y_d + Y_c) & -Y_b & -Y_e \\ -Y_c & -Y_b & (Y_a + Y_b + Y_c) & 0 \\ -Y_f & -Y_e & 0 & (Y_g + Y_f + Y_e) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3 \\ I_4 \end{vmatrix}$$

1.26. Los valores de los parámetros de la figura del problema anterior, están dados en por unidad como sigue:

$$Y_a = -j0,8 \quad Y_b = -j4,0 \quad Y_c = -j4,0 \quad Y_d = -j8,0 \quad Y_e = -j5,0 \quad Y_f = -j2,5 \quad Y_g = -j0,8$$

$$I_3 = 1,0 \angle -90^\circ \quad I_4 = 0,68 \angle -135^\circ$$

Sustituya estos valores en las ecuaciones determinadas en el problema 1.25 y calcule los voltajes en los nodos. Determine numéricamente la matriz Z_{barra} correspondiente.

$$\begin{vmatrix} -j(4+8+2,5) & j8 & j4 & j2,5 \\ j8 & -j(4+8+5) & j4 & j5 \\ j5 & j4 & -j(0,8+4+4) & 0 \\ j2,5 & j5 & 0 & -j(5+2,5+0,8) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \angle -90^\circ \\ 0,68 \angle -135^\circ \end{vmatrix}$$

La solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \angle -90^\circ \\ 0,68 \angle -135^\circ \end{vmatrix} \underbrace{\begin{vmatrix} -j14,5 & j8 & j4 & j2,5 \\ j8 & -j17 & j4 & j5 \\ j5 & j4 & -j8,8 & 0 \\ j2,5 & j5 & 0 & -j8,3 \end{vmatrix}^{-1}}_{Z_{\text{barra}}} = \begin{vmatrix} 0,136 - j0,044 \\ 0,071 - j0,018 \\ -0,004 - j0,033 \\ 0,026 + j0,034 \end{vmatrix}$$

$$Z_{\text{barra}} = Y_{\text{barra}}^{-1} = \begin{vmatrix} j0,105 & j0,098 & j0,093 & j0,091 \\ j0,102 & j0,013 & j0,052 & j0,038 \\ j0,106 & j0,062 & -j0,037 & j0,069 \\ j0,093 & j0,037 & j0,059 & -j0,07 \end{vmatrix}$$